O método – Aprender a aprender

“Aquele que adora praticar sem estudar a teoria é como o marinheiro que embarca sem navio, sem leme e compasso, e nunca sabe onde pode ir parar.” Leonardo da Vinci (1452-1519)

“A primeira coisa que eles procuram na Google, é a tua capacidade de aprender coisas novas rapidamente.”
Laszlo Bock, former SVP of People Operations at Google

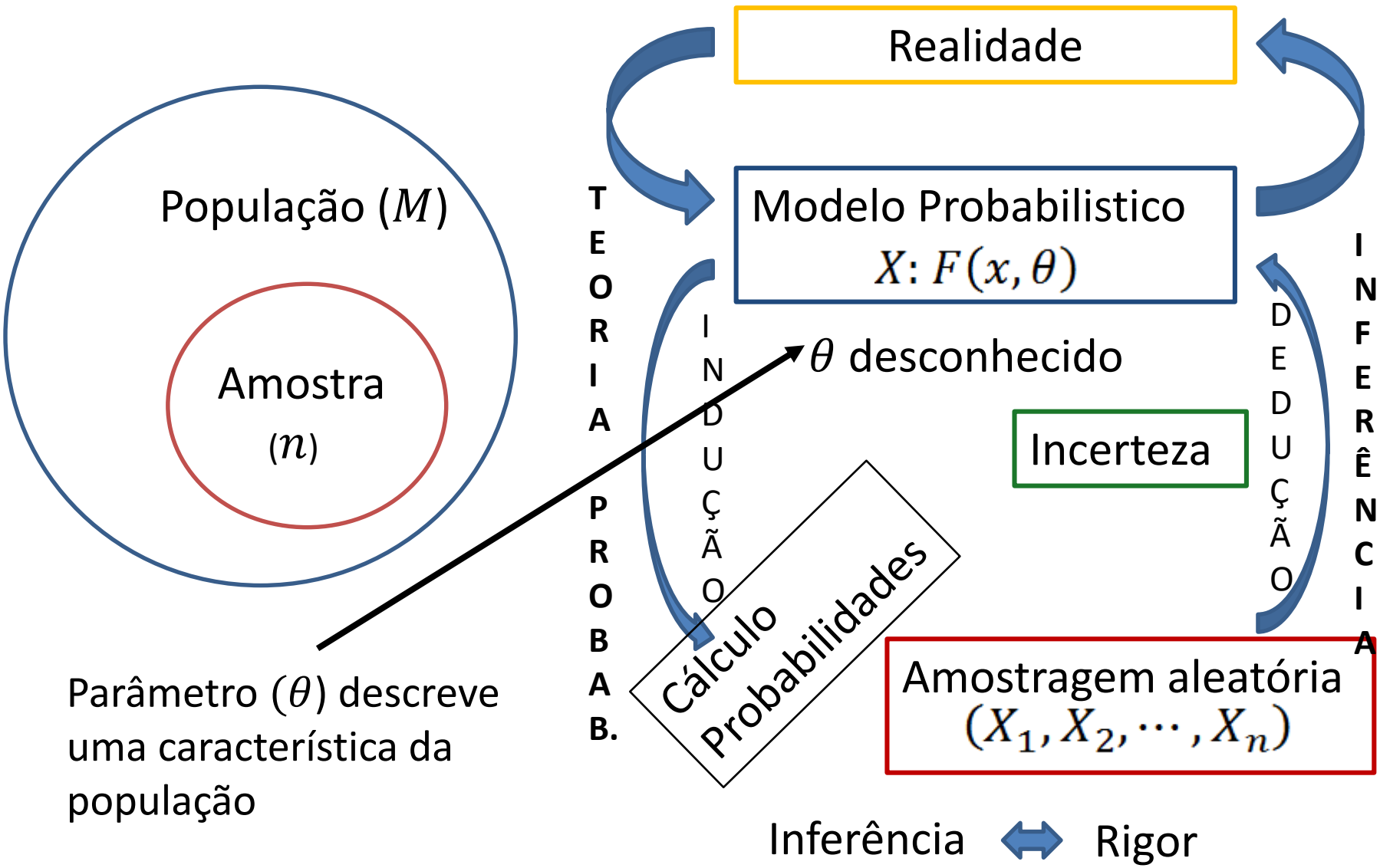
Estatística (Ciência dos dados)

"O pensamento estatístico será um dia tão necessário como qualificação para uma cidadania eficiente como a capacidade de ler e escrever."
H.G. Wells (Escritor inglês, ficção ciêntifica, 1866 – 1946)

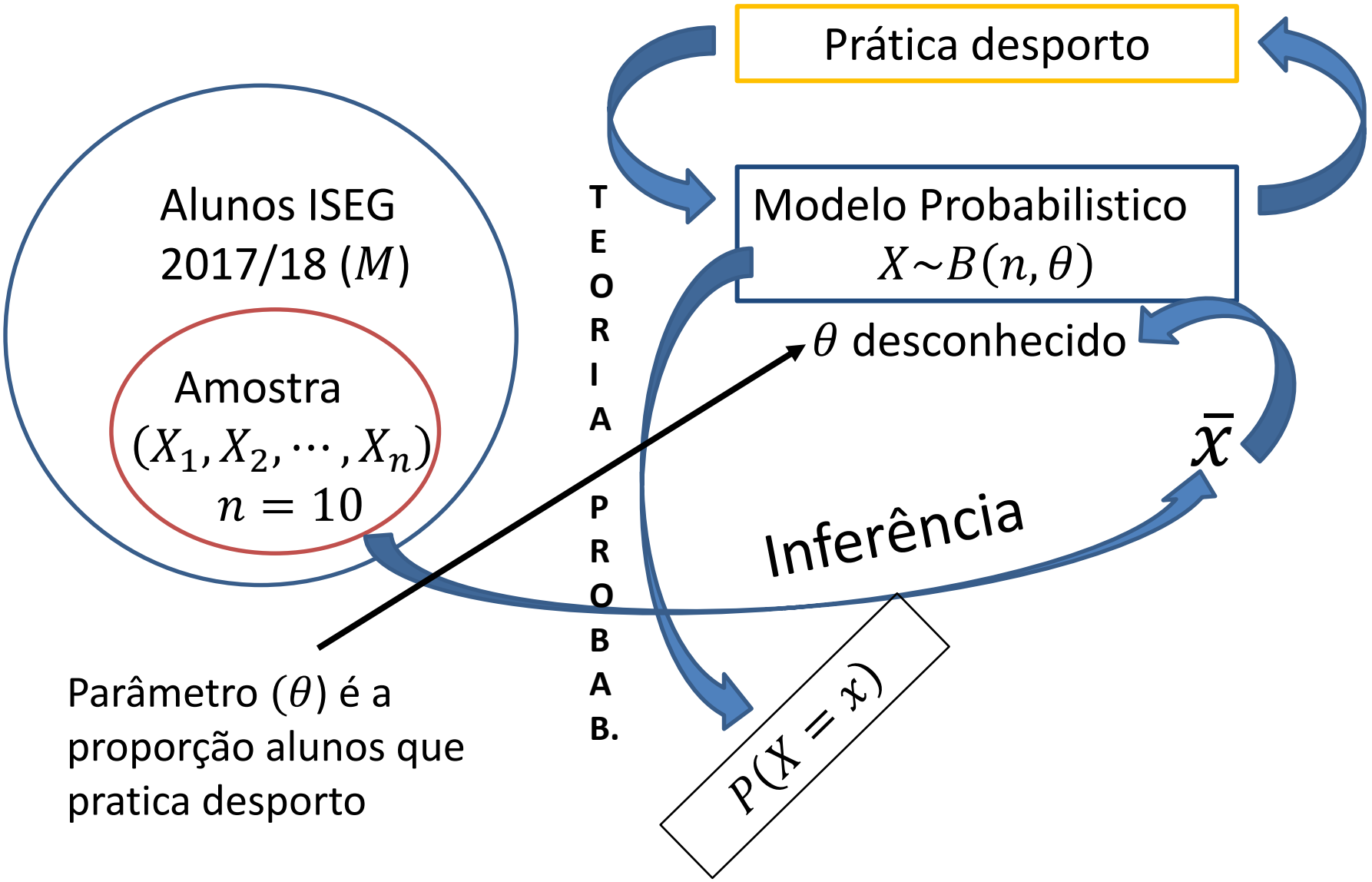
"O próximo século será seguramente o século dos dados."
David Donoho (in 2000, 1957 -)

"But people don't want data. They want answers!"
David Hand (1950 -)

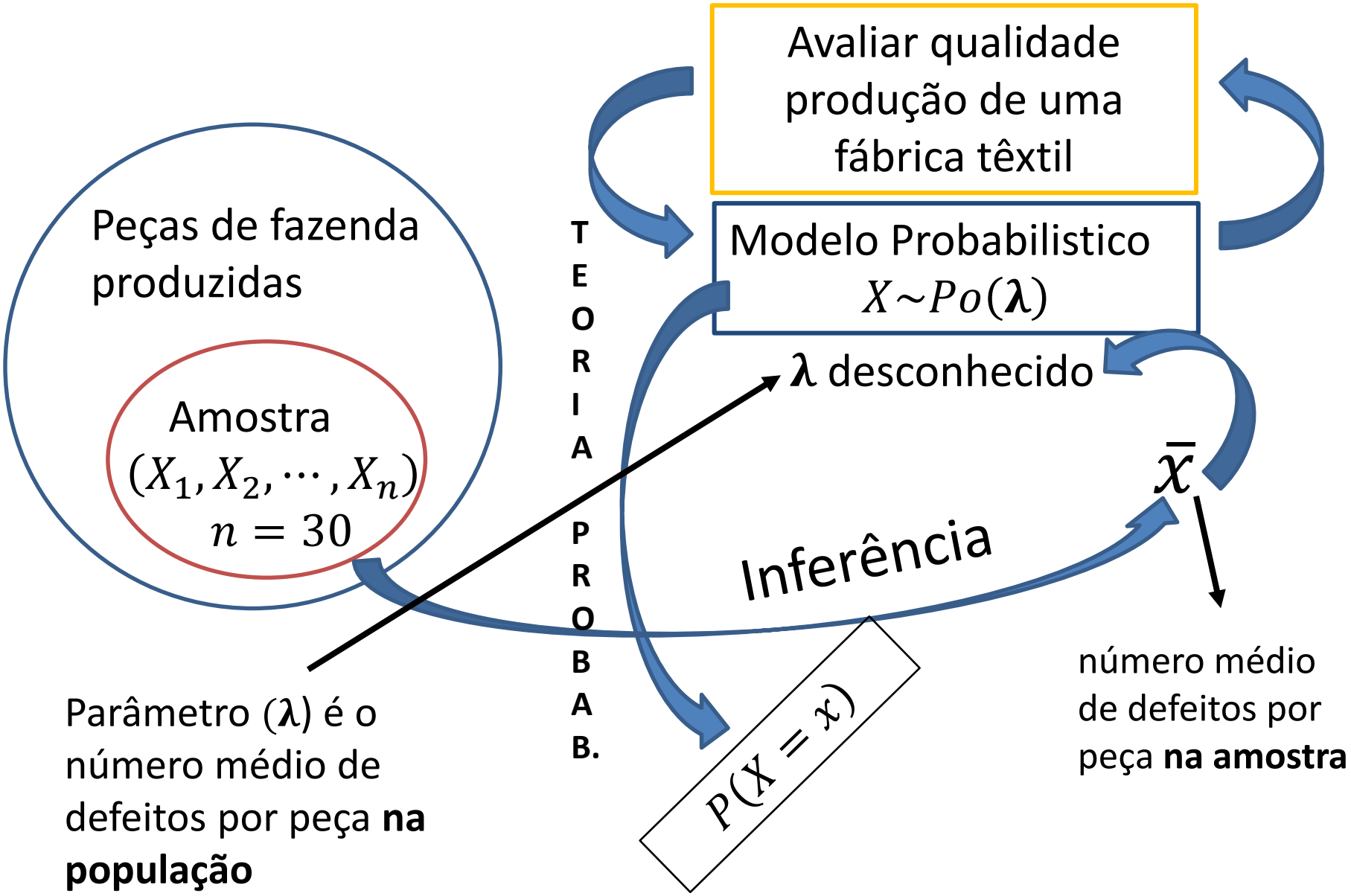
Amostragem: Introdução



Amostragem: Introdução



Amostragem: Introdução



Capítulo 6 - Amostragem

6.2 - Especificação.

- Especificação de um modelo (universo/população)

  Escolha de uma família de modelos probabilísticos para descrever a distribuição da população.

- Distribuição da população

  Descreve o modo como se distribuem os “números” que constituem a população

Amostragem fiquei aqui

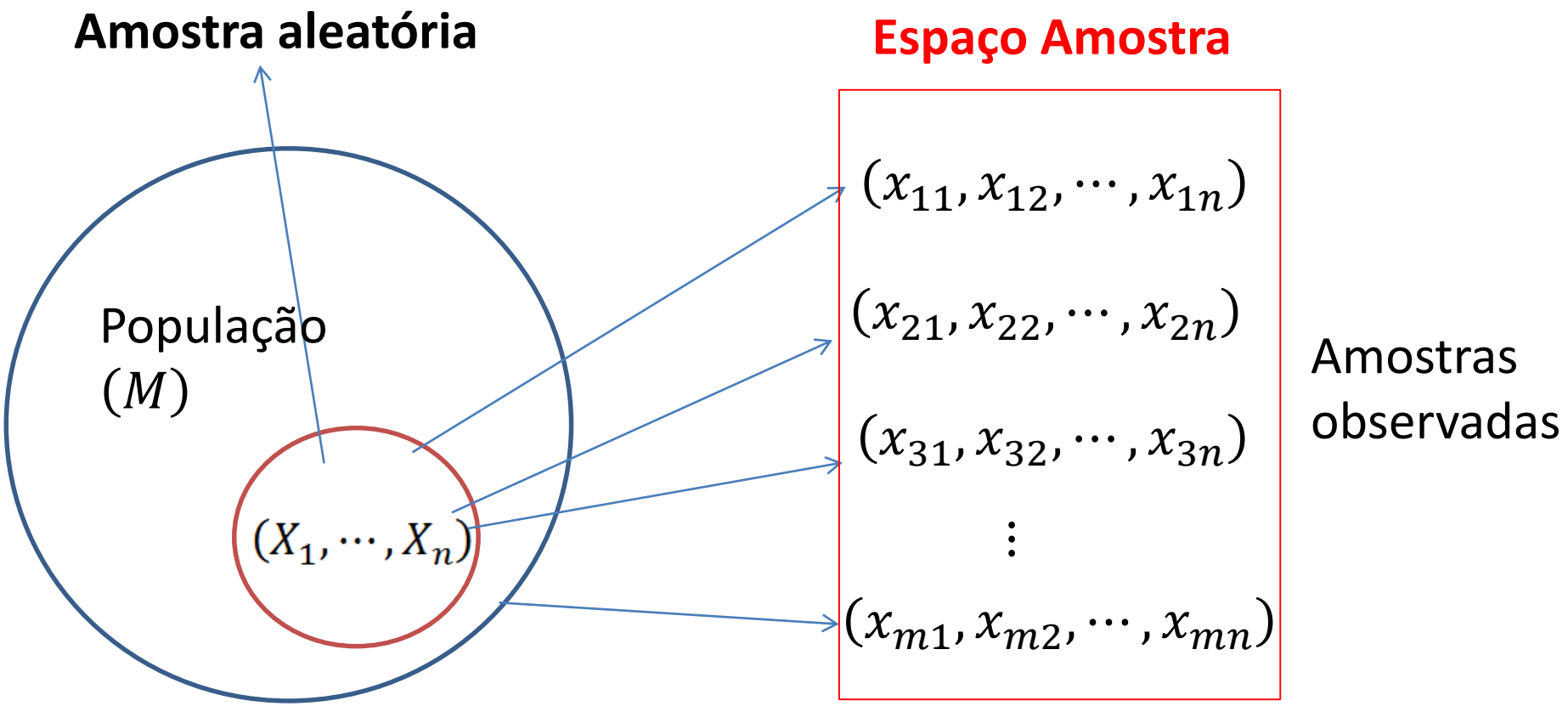
- População
  - Conjunto de “números” dos quais se extrai uma amostra

- Amostra casual
  - Cada elemento da população tem igual probabilidade de ser selecionado

Definição 6.1 – Amostra casual

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, são **independentes e identicamente distribuídas(**uma **“cópia”** da v.a. X**) – simbolicamente** $\boldsymbol{iid}$

Amostragem



Def: **Espaço Amostra** é o conjunto de todas as amostras de dimensão $\boldsymbol{n}$ que é possível extrair de uma população de dimensão M

Amostragem

- Análise Estatística

  Determinar que generalizações, baseadas na amostra, podem ser feitas acerca da população

- Abordagem Frequencista

  O aspecto central da análise estatística consiste em reconhecer a **variabilidade** dos diferentes **conjuntos amostrais**

  "Statistics is the science of variation." Douglas M. Bates (1949 -)

Exemplo – Assuma-se que X (prática ou não de desporto)$\sim B(1,\theta)$

$Modelo$ será:

$$F_\theta = \{f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}: x \in \{0,1\} \Lambda\, \theta \in \boldsymbol{\theta} = (0,1)\}$$

Amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, sendo:

$X_i = 1$ $(iésimo\ indíviduo\ da\ amostra\ pratica\ desporto)$

$X_i = 0$ $(caso\ contrário)$

$X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ são $\boldsymbol{iid}$ a X

Suponha-se que a amostra tem dimensão $n = 3$.

Espaço amostra terá 8 elementos:

$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$	com probabilidade	$(1-\theta)^3$
$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$, $(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})$, $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$	"	$\theta(1-\theta)^2$
$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$, $(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})$, $(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1})$	"	$\theta^2(1-\theta)$
$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$	"	θ^3

Amostragem

Uma empresa tem 6 trabalhadores. O número de anos de experiência dos mesmos é $\{2, 4, 6, 6, 7, 8\}$. Seleccionaram-se amostras de 2 trabalhadores sem reposição. O **espaço amostra** contem 15 amostras diferentes representadas na tabela abaixo:

	x_1	x_2
Am1	2	4
Am2	2	6
Am3	2	6
Am4	2	7
Am5	2	8
Am6	4	6
Am7	4	6
Am8	4	7
Am9	4	8
Am10	6	6
Am11	6	7
Am12	6	8
Am13	6	7
Am14	6	8
Am15	7	8

Cada uma das 15 amostras tem a mesma probabilidade de ser selecionada.

Amostragem

6.3 – Estatística

A estatística descreve uma característica da amostra

Permite condensar a informação amostral num único número.

Qualquer função de $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, por exemplo, $T = h(\boldsymbol{X})$ é uma **estatística.**

Definição 6.2 – Estatística

Uma estatística é uma variável aleatória $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *função da* amostra aleatória $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, *que não é função de qualquer parâmetro desconhecido.*

Amostragem

Exemplo 6.7 – Se $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ ***é amostra casual de uma população de Bernoulli,*** *as* estatísticas:

$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *representa o número de* "sucessos" na amostra,

$T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, *indica a proporção de "sucessos"* na amostra.

Exemplo 6.9 – Se $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ ***é amostra casual de uma população normal*** $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ com parâmetros desconhecidos,

São estatísticas unidimensionais:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Não são estatísticas:

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \qquad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Amostragem

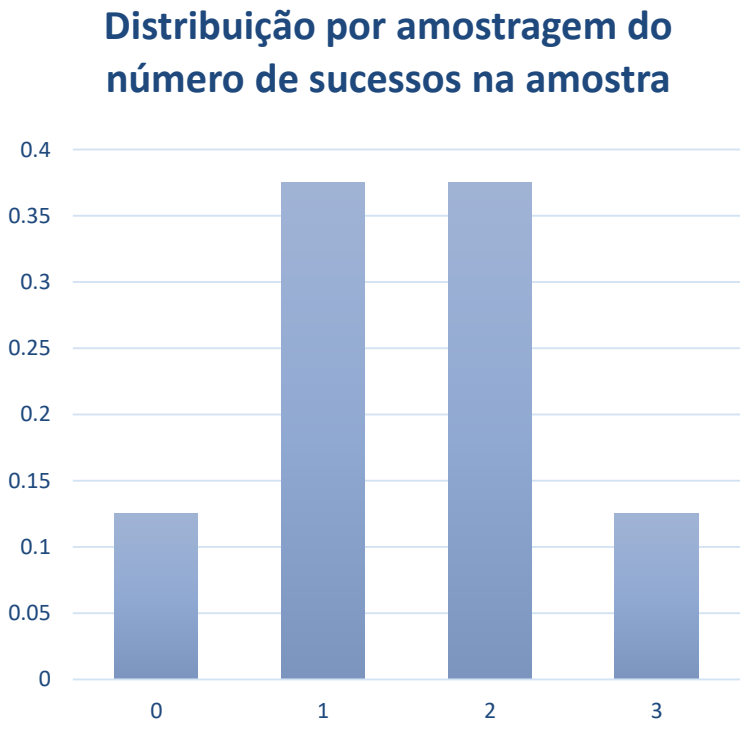
- Distribuições amostrais
  - Distribuição da estatística T.
  - Pode ser difícil de obter
  - Vamos usar a estatística T e a sua distribuição para inferir sobre parâmetros da população usando a amostra
  - Utilidade de qualquer estatística **depende** do **comportamento probabilístico da estatística** e **não** do **seu valor** $t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ para uma amostra particular.

Amostragem

Exemplo – Assuma-se que X (prática ou não de desporto)$\sim B(1,\theta)$

Seja uma amostra de dimensão $n = 3$ e a estatística $T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Espaço amostra	t_1	$P\left(T_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$
$(0,0,0)$	0	$1/8$
$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$	1	$3/8$
$(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$	2	$3/8$
$(1,1,1)$	3	$1/8$



Amostragem

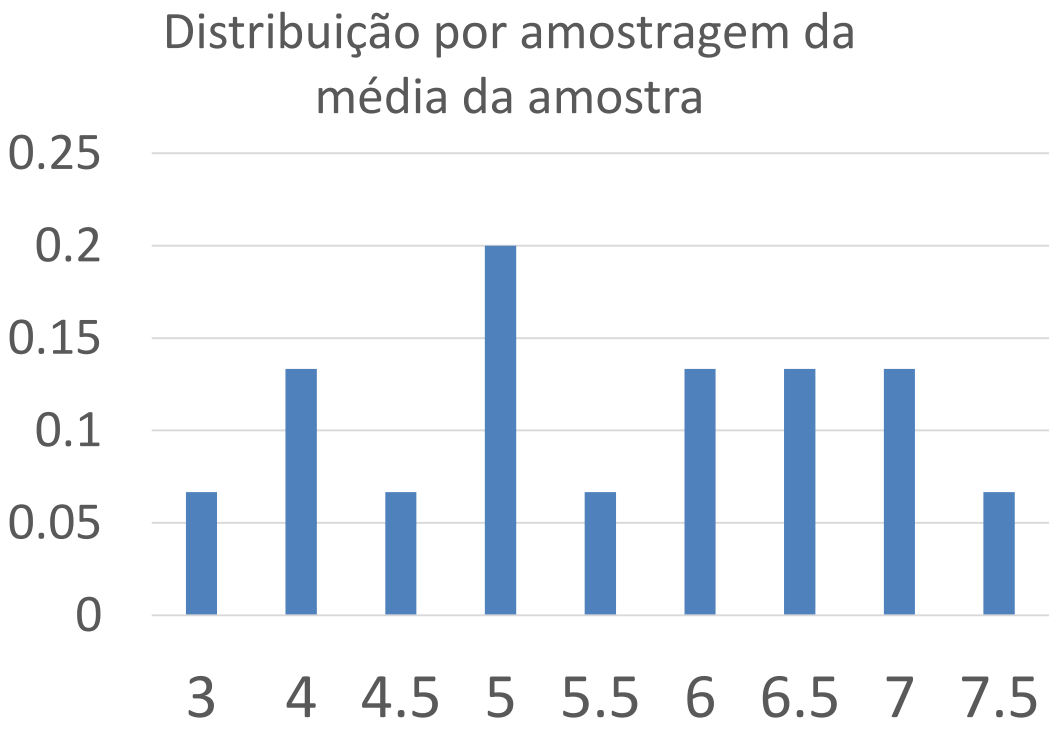
		x_1	x_2	$\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{2} x_i/2$	
ESPAÇO AMOSTRA	Am1	2	4	3	ESTATÍSTICAS de ESPAÇO AMOSTRA
	Am2	2	6	4	
	Am3	2	6	4	
	Am4	2	7	4.5	
	Am5	2	8	5	
	Am6	4	6	5	
	Am7	4	6	5	
	Am8	4	7	5.5	
	Am9	4	8	6	
	Am10	6	6	6	
	Am11	6	7	6.5	
	Am12	6	8	7	
	Am13	6	7	6.5	
	Am14	6	8	7	
	Am15	7	8	7.5	

Amostragem

$$t(x_{1j}, x_{2j}) = \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{2} x_{ij}/2 \ (j = 1, 2, \cdots, 15)$$

$\bar{x}$	$P(\bar{X} = \bar{x})$
3	$1/15$
4	$2/15$
4.5	$1/15$
5	$3/15$
5.5	$1/15$
6	$2/15$
6.5	$2/15$
7	$2/15$
7.5	$1/15$

Estatística $\mathrm{T}(x_{1j}, x_{2j}) = \bar{X}_j$ é uma variável aleatória



Amostragem

Distribuições por amostragem do **mínimo** e do **máximo** da amostra.

Seja a amostra $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ onde $X_i \sim F(x)$, f.d.p ou f.p. $f(x)$.

- **Estatísticas de ordem**: obtêm-se ordenando a amostra:

$$\underbrace{X_{(1)}}_{Min\{X_i\}} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq \underbrace{X_{(n)}}_{Max\{X_i\}}$$

- **Distribuição do mínimo**:

$$G_{(1)}(X) = P\left(X_{(1)} \leq x\right) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

- **Distribuição do máximo**:

$$G_{(n)}(X) = P\left(X_{(n)} \leq x\right) = [F(x)]^n$$

Amostragem

Exemplo 6.15 – Seja uma população $X \sim Exp(\lambda)$,e uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. O mínimo da amostra, $X_{(1)}$, tem pelo T.5.4 uma distribuição exponencial de parâmetro $n\lambda$:

A distribuição do máximo da amostra, $X_{(n)}$ é:

$$G_{(n)}(X) = P\left(X_{(n)} \leq x\right) = \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^n$$

Exerc.4 Seja uma amostra casual de dimensão 5 de uma população com função densidade, $f(x) = 3x^2 \quad (0 < x < 1)$. Determine a probabilidade de o valor máximo da amostra não exceder $0{,}9$. E de o valor mínimo da amostra ser inferior a $0{,}1$.

Amostragem

- Média e variância amostrais
  - Média amostral

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

  - Variância amostral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} - \bar{X}^2$$

Teorema 6.1 – Se $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma amostra casual de uma população para a qual existem média e variância

$$E(\bar{X}) = \mu; Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- O teorema apenas exige a existência de μ e de σ^2 (no universo).

Amostragem

$T(X_1, X_2) = \bar{X}$ é uma v.a. Discreta com
$D_{\bar{X}} = \{3, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5\}$

$\bar{x}$	$P(\bar{X} = \bar{x})$
3	$1/15$
4	$2/15$
4.5	$1/15$
5	$3/15$
5.5	$1/15$
6	$2/15$
6.5	$2/15$
7	$2/15$
7.5	$1/15$

Uma empresa tem 6 trabalhadores. O número de anos de experiência dos mesmos é $\{2, 4, 6, 6, 7, 8\}$. Então a média de anos de experiência na população é

$$E(X) = \mu = 5.5$$

$$E(\bar{X}) = \sum_{\bar{x} \in D_{\bar{X}}} \bar{x} f_{\bar{X}}(\bar{x}) = 5.5$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

Amostragem

Teorema 6.2 – Se $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma amostra casual de uma população para a qual existem média e variância, tem-se,

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

- Os valores de S^2 têm tendência para saírem inferiores à variância da população; a variância amostral subavalia, **em média**, a variância da população.

- Correcção do problema → **variância corrigida** definida por,

$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \quad \text{e} \quad E(S'^2) = \sigma^2$$

Amostragem

• Parâmetros População	• Estatísticas	• Parâmetros da distribuição amostral
Bernoulli: Proporção - θ	Proporção amostral - $\bar{X}$	Média da proporção amostral - $E(\bar{X})$
Poisson Média - $\boldsymbol{\lambda}$	Média da amostra - $\bar{X}$	Média da média da amostra - $E(\bar{X})$
Normal Média - μ Variância - σ^2	Variância da amostra S^2	Variância da média da amostra $Var(\bar{X})$
Exponencial Média - μ	Variância corrigida da amostra S'^2	Média da Variância da amostra $E(S^2)$

Amostragem - Populações normais **:**

- Distribuição da Média amostral com variância conhecida

  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população $N(\mu, \sigma^2)$
  - Tem-se, $E(\bar{X}) = \mu$; $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$

Logo, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ ou $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

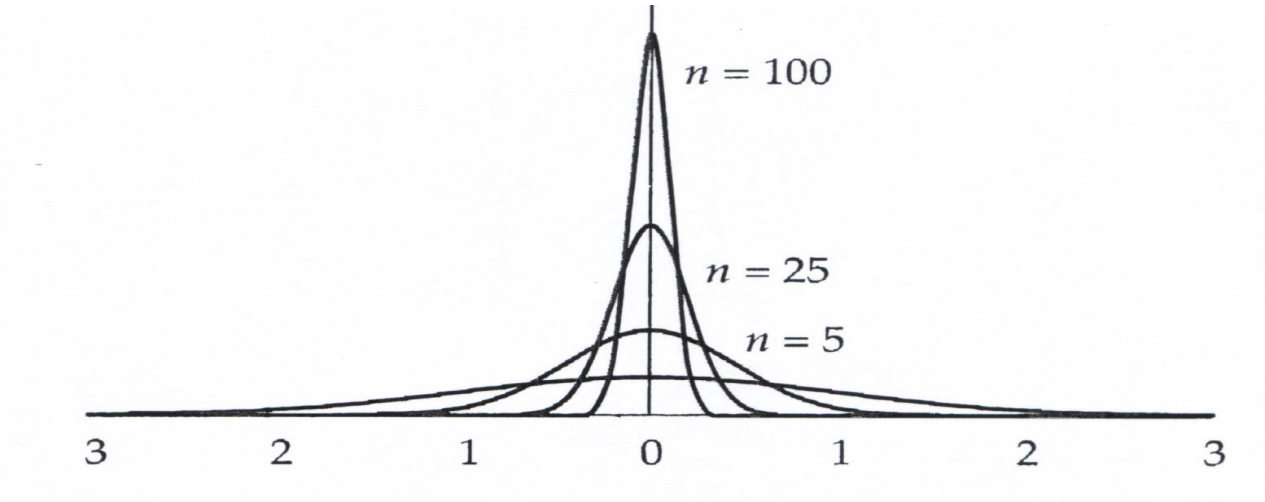


Fig. 6.13 – Distribuição de $\bar{X}$ para *n* = 5, 25 e100.

Amostragem:

Exemplo 6.21 – Suponha-se que a duração das chamadas telefónicas locais em determinada empresa pode ser bem aproximada por uma distribuição normal com média igual a 17 minutos e variância 25. Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de *n* chamadas, a duração média se situar entre (a) 16 e 18 minutos e (b) 14 e 16m?

a) $n = 25$

$$P(16 < \bar{X} < 18) = P\left(\frac{16-17}{5/\sqrt{25}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{18-17}{5/\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826$$

b) $n = 100$

$$P(16 < \bar{X} < 18) = P\left(\frac{16-17}{5/\sqrt{100}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{18-17}{5/\sqrt{100}}\right) = P(-2 < Z < 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0.9544$$

Amostragem:

b) $n = 25$

$$P(14 < \bar{X} < 16) = P\left(\frac{14-17}{5/\sqrt{25}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{16-17}{5/\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-3 < Z < -1) \ = \Phi(-1) - \Phi(-3)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(1) \approx 0.1573$$

$n = 100$

$$P(14 < \bar{X} < 16) = P\left(\frac{14-17}{5/\sqrt{100}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{16-17}{5/\sqrt{100}}\right) = P(-6 < Z < -2)$$

$$= \Phi(-2) - \Phi(-6) = \Phi(6) - \Phi(2) \approx 0.0228$$

Amostragem:

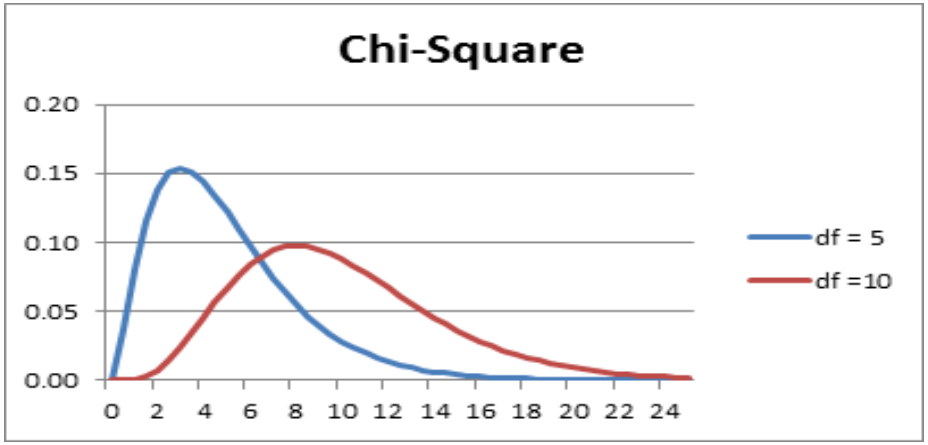
- Populações normais - Distribuição da Variância amostral

  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população $N(\mu, \sigma^2)$
  - Relembre-se, $X_i \sim N(0,1) \Rightarrow X_i^2 \sim \boldsymbol{\chi}^2_{(n)}$

Logo,

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\boldsymbol{X}})^2}{\sigma^2} \sim \boldsymbol{\chi}^2_{(n-1)}$$

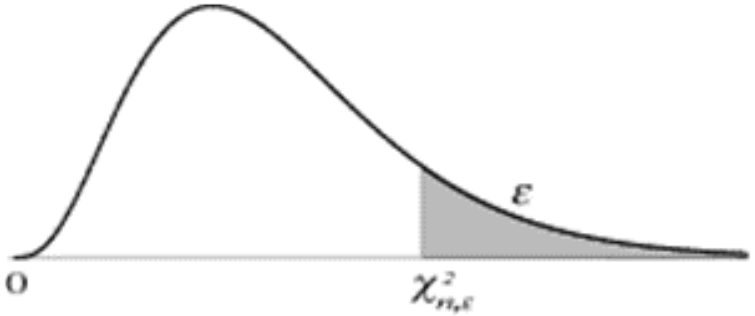
(um grau de liberdade é perdido quando se usa $\overline{\boldsymbol{X}}$ em vez de $\boldsymbol{\mu}$)



Amostragem:

TABELA 6 – DISTRIBUIÇÃO DO QUI-QUADRADO

$$\chi^2_{(n),\varepsilon}: P\left(X > \chi^2_{(n),\varepsilon}\right) = \varepsilon$$



n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Amostragem - Populações normais **:**

- Distribuição da Média amostral com variância desconhecida

  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população $N(\mu, \sigma^2)$

    desconhecido

  - Deve substituir-se σ^2 por S^2 ou S'^2

  - Deve usar-se o rácio de Student $\dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\left(\chi^2_{(n-1)}\right)/n}} \sim t_{(n-1)}$

Logo, se $\bar{X}$ e S^2 são a média e variância da amostra casual de tamanho n de uma população normal com média μ, então

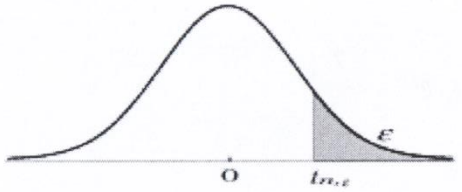
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$$

- Para grandes amostras a *t*-"*Student*" pode ser aproximada pela normal

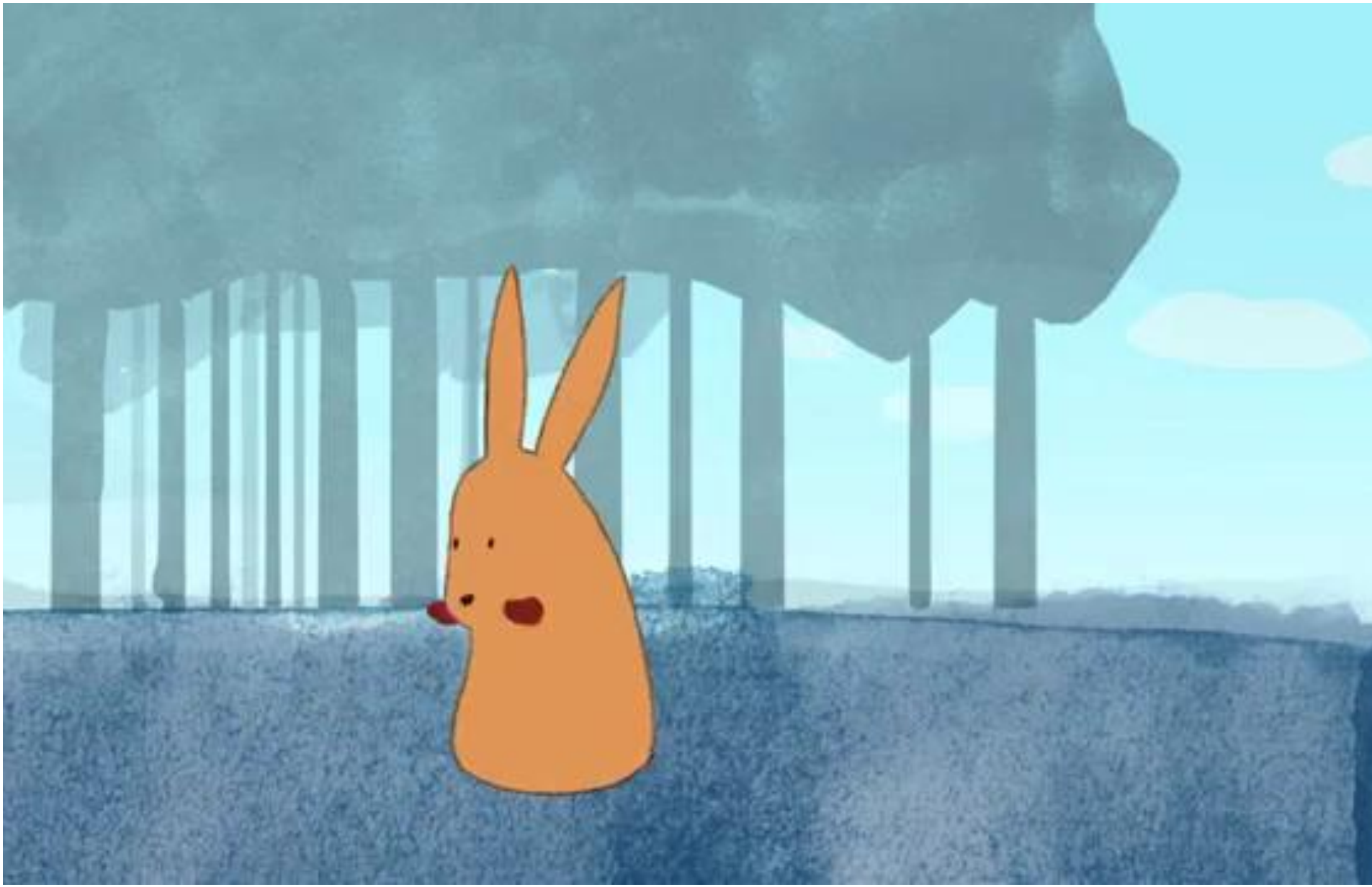
Amostragem:

TABELA 7 – DISTRIBUIÇÃO *t*-"*Student*"

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



$n \setminus \varepsilon$	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
...								
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090



Amostragem

Teorema 5.10 Teorema do limite central

Dada a sucessão de variáveis aleatórias $iid, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$, com média μ e variância σ^2(finita), então, quando $n \to +\infty$, a função de distribuição da variável aleatória,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Diz-se que Z_n tem distribuição assintótica $N(0,1)$.

Notas: **1. O T.L.C. aplica-se a v.a.(s)** X_i discreta ou contínua.

2. O T.L.C. pode aplicar-se desde que se conheçam a média e variância da v.a. X_i , **mesmo que a sua distribuição seja desconhecida**

Amostragem

Distribuições por amostragem assintóticas

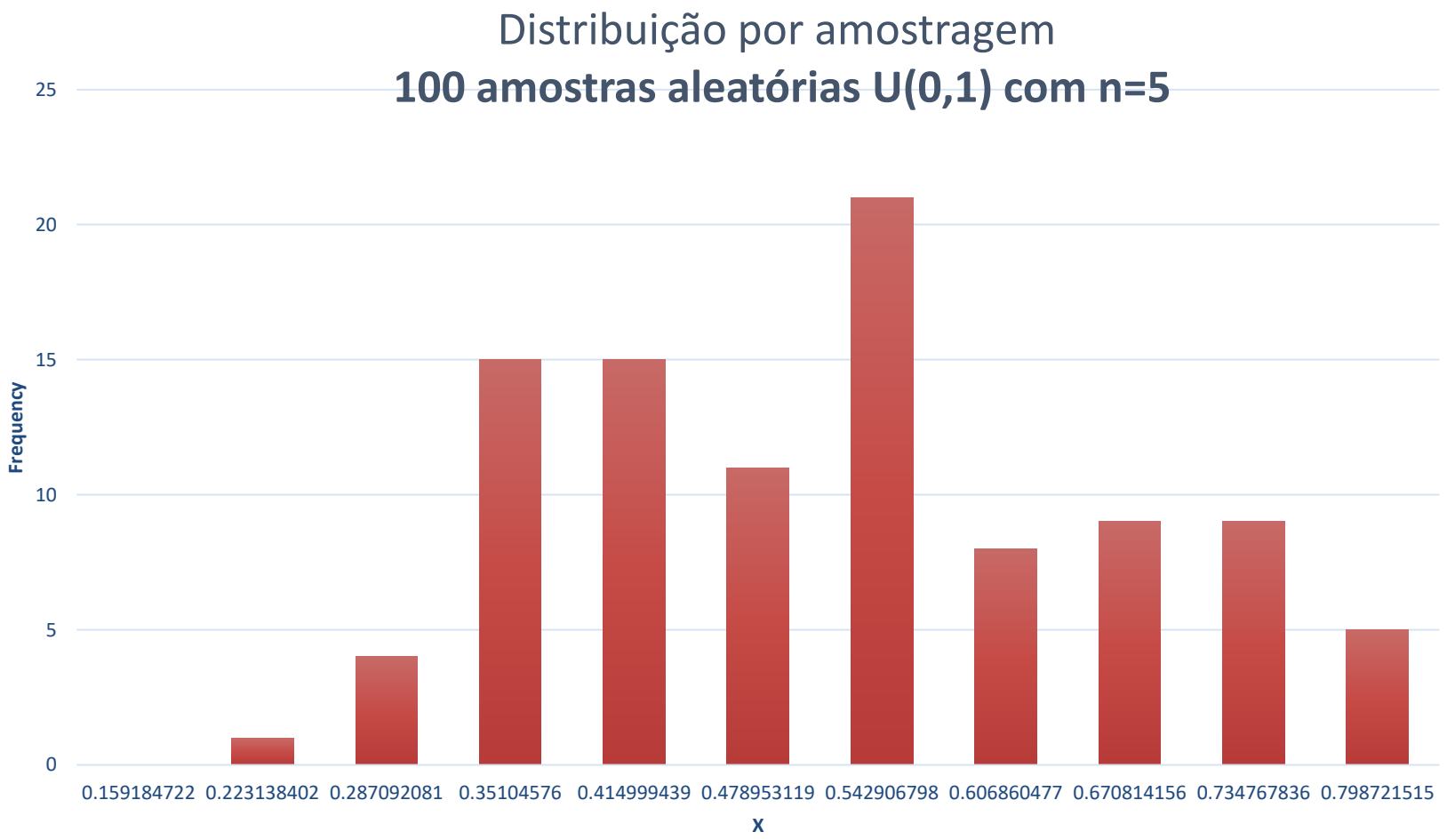
Em muitas situações não é possível obter **distribuições exactas** para as estatísticas $\sum_{i=1}^{n} X_i, \bar{X}, S^2, S'^2$, mas podem obter-se **distribuições aproximadas**, desde que existam os momentos da população até certa ordem.

- Distribuição assintótica da Média amostral
  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população
  - $E(X_i) = \mu; Var(X_i) = \sigma^2 \; (i = 1,2, \cdots, n)$

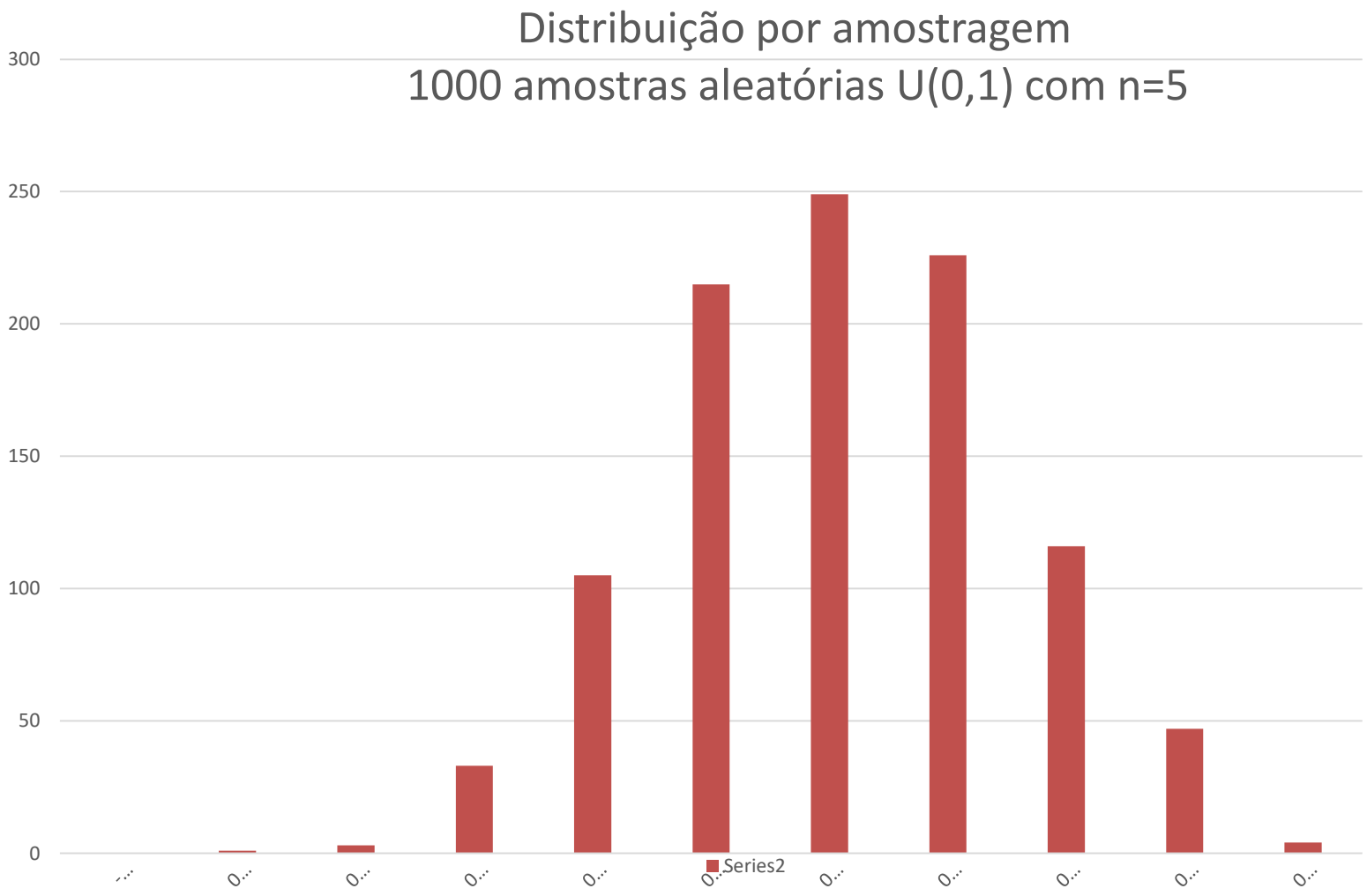
Então, para $n \to \infty$, pelo Teorema do Limite Central

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1) \quad (6.21)$$

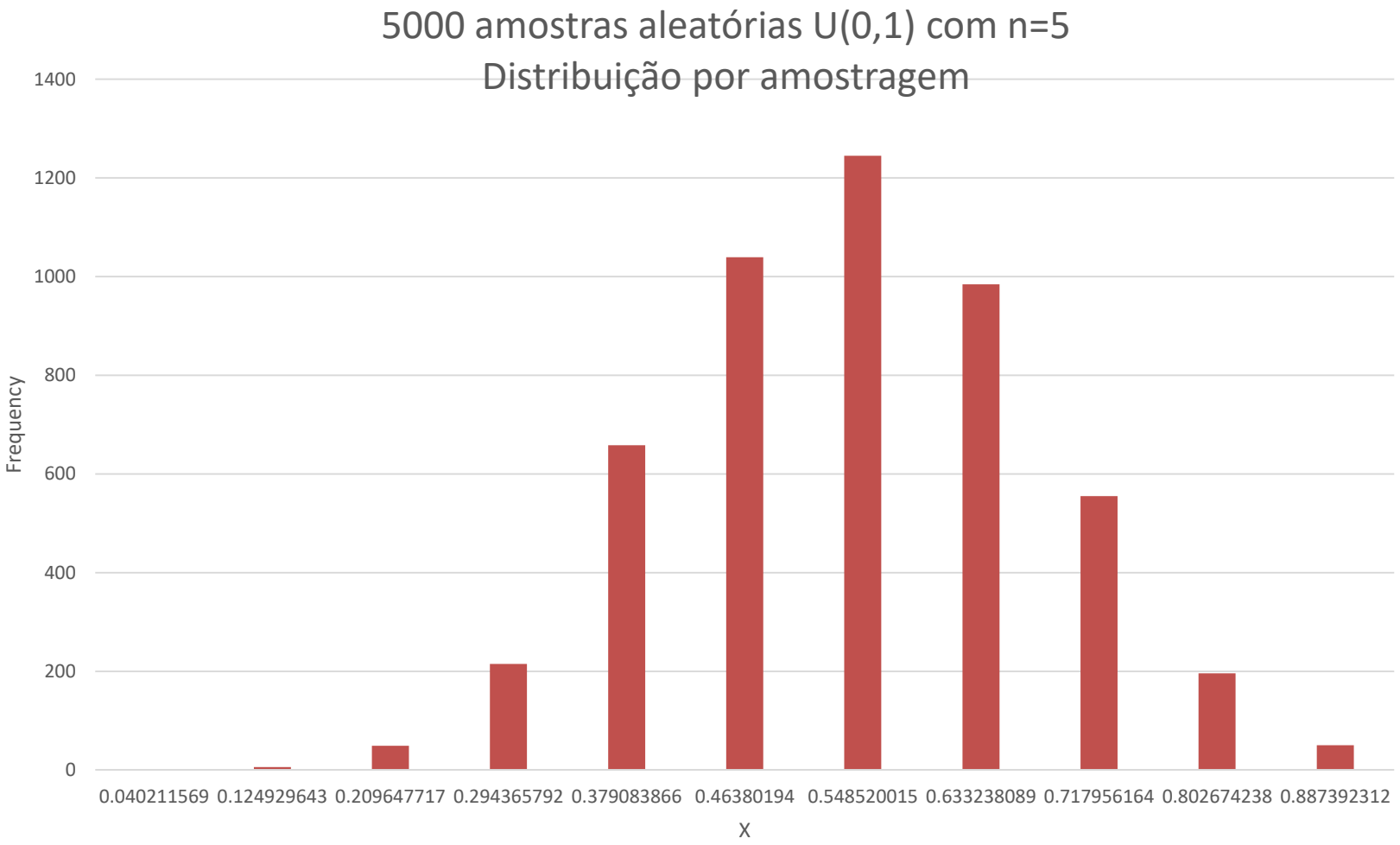
Amostragem


Distribuição por amostragem
100 amostras aleatórias U(0,1) com n=5
Frequency
25
20
15
10
5
0
0.159184722
0.223138402
0.287092081
0.35104576
0.414999439
0.478953119
0.542906798
0.606860477
0.670814156
0.734767836
0.798721515
x

Amostragem


Distribuição por amostragem
1000 amostras aleatórias U(0,1) com n=5
300
250
200
150
100
50
0
Series2

Amostragem


5000 amostras aleatórias U(0,1) com n=5
Distribuição por amostragem
Frequency
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.040211569
0.124929643
0.209647717
0.294365792
0.379083866
0.46380194
0.548520015
0.633238089
0.717956164
0.802674238
0.887392312
X

Amostragem

Exemplo 6.17 – Sejam as variáveis aleatórias iid, $(X_1, X_2, \cdots, X_{30})$ com distribuição uniforme no intervalo $(0{,}10)$. Pretende determinar-se $P(\bar{X} < 5.5)$. Como o valor exacto é de difícil cálculo, recorre-se ao TLC (6.21). Então, tem-se:

$$E(\bar{X}) = \mu = 5, \qquad Var(\bar{X}) = \sigma^2/30 = \frac{10^2/12,}{30} = 0.53.$$

$$P(\bar{X} < 5.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{5.5 - 5}{0.53}\right) \approx \Phi(0.94) = 0.8264$$

Amostragem - Populações Bernoulli**:**

População é composta por elementos de dois tipos: os que possuem e os que não possuem determinado atributo.

- Distribuição da proporção amostral
  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população $B(\theta)$
  - Tem-se, $E(\bar{X}) = \theta;\ \ Var(\bar{X}) = \theta(1-\theta)/n$
  - Então, para $n \to \infty$, pelo Teorema do Limite Central

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} = \frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1) \quad (6.21)$$

Amostragem - Populações Bernoulli**:**

Exemplo 6.19 – Admita-se que uma instituição bancária classifica os seus clientes possuidores de cartões de crédito em “maus” e “bons” riscos, conforme tenham ou não faltado a um pagamento nos últimos 2 anos. Suponha-se que a proporção de “maus” riscos (classificados por $X = 1$*) é de* 0.05 *para as agências da zona de Lisboa. Qual a* probabilidade de se obter pelo menos 10% de maus riscos numa amostra de:

(a) 50 clientes; (b) 400 clientes?

Amostragem - Populações Bernoulli**:**

A resposta a qualquer das duas alíneas é obtida calculando $P(\bar{X} \geq 0{,}1)$, sabendo-se que $X_i \sim Bi(1; 0{,}05) \quad i = 1,2,\cdots,n.$

(a) $n = 50;\ \theta = 0{,}05 \rightarrow$ aproximar usando o TLC

$$P(\bar{X} \geq 0{,}1) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} < \frac{0{,}1 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{50}}}\right)$$

$$\approx 1 - \boldsymbol{\Phi}(1.62) = 1 - 0.9474 = 0.0526$$

(b) $n = 400;\ \theta = 0{,}05 \rightarrow$ aproximar usando o TLC

$$P(\bar{X} \geq 0{,}1) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} < \frac{0{,}1 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{400}}}\right)$$

$$\approx 1 - \boldsymbol{\Phi}(4{,}59) = 0$$